Colle du 6 janvier : Équations différentielles linéaires et révisions d'intégration

13.1 Cours

Question de cours 1 : Formule de Taylor avec reste intégral.

Question de cours 2 : Formule du changement de variable.

Question de cours 3 : Lien entre équations différentielles et exponentielle de matrices.

13.2 Équations différentielles linéaires

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f''(x) + f'(x) + f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 2 : Résoudre :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 2x + z + \operatorname{sh} t \\ y' & = & x - y - z + \operatorname{ch} t \\ z' & = & -x + 2y + 2z - \operatorname{ch} t \end{array}\right.$$

Exercice 3 : Soit $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue intégrable. Montrer que l'équation $y'' + a(t)y = 0$ admet des solutions non bornées sur $[0, +\infty[$.

Exercice 4 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement positive. Soit $B : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}^n$ continue bornée. Montrer que $X' = AX + B$ admet une unique solution bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5 : Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $f([a, b]) \subseteq \mathbb{R}_-^\times$. Montrer que $y'' + fy = g$ admet une unique solution sur $[a, b]$ vérifiant $y(a) = y(b) = 0$.

Exercice 6 : Quelle est l'image de $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 7 : Soient $S, T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\exp(S)\exp(T) = \exp(S + T)$.

Exercice 8 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'équation différentielle linéaire (E) : $X' = MX$. On suppose que, si $X(t)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$, alors $\|X(t)\|$ est décroissante, et si $\|X(t)\|$ est constante, alors $X(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que toute solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$ tend vers 0 à l'infini.

Exercice 9 : Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues. On considère l'équation $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ (E).
1. Montrer que les zéros d'une solution de (E) sont isolés.
Soient y et z deux solutions de (E) non proportionelles.
2. Montrer que y et z n'ont pas de zéro commun.
3. Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de y il existe un unique zéro de z.

13.3 Révisions d'intégration

Voir les exercices de la première colle.